Полтавська область 2017-2018
Умови. Вказівки. Відповіді. Розв'язання
Секції: математики, прикладної математики, математичного моделювання

9 клас

I рівень

1. Розв'язати рівняння $|a+x|=|1+x|$, де a – параметр.

Розв'язання.

1. $|a+x|=|1+x| \Leftrightarrow |a+x|^2=|1+x|^2 \Leftrightarrow 2(a-1)x=1-a^2.$ Відповідь: якщо $a=1,$ то $x\in(-\infty,+\infty),$ якщо $a\neq 1,$ то $x=-\dfrac{a+1}{2}.$

2. Порівняти числа $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ та $\sqrt{13}-\sqrt{11}.$

Розв'язання.

2. $\sqrt{5}-\sqrt{3}\,?\,\sqrt{13}-\sqrt{11} \Leftrightarrow \sqrt{5}+\sqrt{11}\,?\,\sqrt{13}+\sqrt{3} \Leftrightarrow 16+2\sqrt{55}\,?\,16+2\sqrt{39}.$ Звідси $\sqrt{5}-\sqrt{3}>\sqrt{13}-\sqrt{11}.$

3. За перший квартал року ціна нафти зменшилась на 25 відсотків, за другий квартал збільшилась на 20 відсотків, за третій квартал зменшилась на 10 відсотків, а за четвертий квартал збільшилась на 20 відсотків. Збільшилась чи зменшилась ціна нафти за рік?

Розв'язання.

3. Нехай на початок року ціна нафти становила A, тоді на кінець року вона дорівнюватиме $A\cdot 0{,}75\cdot 1{,}2\cdot 0{,}9\cdot 1{,}2=0{,}972A.$ Відповідь: зменшилась.

II рівень

4. У прямокутному трикутнику $ABC\left(\angle C=90^\circ\right)$ висота CH перетинає бісектрису BK в точці $O.$ Якщо точка O є серединою бісектриси BK, то $\angle B=60^\circ.$ Довести.

Розв'язання.

4. CO – медіана прямокутного трикутника $ACK\left(\angle C=90^\circ\right)\Rightarrow OC=OK=OB\Rightarrow$ $\angle CBO=\angle BCO=x, \angle COK=\angle OCK=y.$ Але $x+y=90^\circ, y=2x\Rightarrow x=30^\circ\Rightarrow \angle B=2x=60^\circ.$

5. Учню надіслали завдання з 20 задач. За кожну правильно розв'язану задачу йому ставлять 8 балів, за кожну неправильно розв'язану – мінус 5 балів, за задачу, яку не пробував розв'язувати, – 0 балів. Учень отримав 13 балів. Скільки задач він розв'язав правильно?

Розв'язання.

5. Нехай x, y – кількість правильно або неправильно розв'язаних задач відповідно. Тоді $8x-5y=13\Leftrightarrow 8(x+y)=13(y+1)\Rightarrow(x+y)\vdots 13.$ Але $x+y\le 20\Rightarrow x+y=13\Rightarrow y+1=8.$ Остаточно $x=6, y=7.$ Відповідь: 6.

III рівень

6. Якщо площі і периметри двох прямокутних трикутників відповідно рівні, то ці трикутники рівні. Довести.

Розв'язання.

6. Нехай $a, b\left(a \geq b\right)$; $a', b'\left(a' \geq b'\right)$ – катети цих трикутників. Тоді за умовою $P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = a' + b' + \sqrt{a'^2 + b'^2}, S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a'b'.$ Позначимо $t = a + b, t' = a' + b'.$ Маємо $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(a + b\right)^2 - 2ab} = \sqrt{t^2 - 4S}, \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{\left(a' + b'\right)^2 - 2a'b'} = \sqrt{t'^2 - 4S}.$ В результаті одержимо $P = t + \sqrt{t^2 - 4S} = t' + \sqrt{t'^2 - 4S}.$ Нехай $t > t',$ тоді $t + \sqrt{t^2 - 4S} > t' + \sqrt{t'^2 - 4S}$ - хибне. Аналогічно неможливий випадок $t < t',$ отже, $t = t' \Rightarrow a + b = a' + b'.$ Із врахуванням рівності $ab = a'b'$ одержимо $a = a', b = b',$ трикутники рівні.

7. Знайти всі набори простих чисел $p, q,$ таких, що числа $p - q, p + q$ – теж прості.

Розв'язання.

7. Зрозуміло, що числа $p - q, p + q$ – непарні, тому $q = 2.$ Але числа $p - 2, p, p + 2$ дають різні остачі при діленні на 3, тому одне з них ділиться на 3. Звідси $p - 2 = 3 \Rightarrow p = 5.$

10 клас

I рівень

1. Розв'язати нерівність $\left|a + x\right| < \left|a - x\right|,$ де a – параметр.

Розв'язання.

1. $\left|a + x\right| < \left|a - x\right| \Leftrightarrow \left|a + x\right|^2 < \left|a - x\right|^2 \Leftrightarrow 4ax < 0.$ Відповідь: якщо $a < 0,$ то $x > 0,$ якщо $a > 0,$ то $x < 0,$ якщо $a = 0,$ то розв'язків немає.

2. Знайти множину значень функції $y = \sqrt{1 - x^{2018}}.$

Розв'язання.

2. Зрозуміло, що $y = \sqrt{1 - x^{2018}} \geq 0 = y\left(1\right).$ Також очевидно $y = \sqrt{1 - x^{2018}} \leq 1 = y\left(0\right).$ Внаслідок неперервності заданої функції множиною її значень є $\left[0;1\right].$

3. Знайти діагоналі ромба зі стороною $\sqrt{2}$, якщо його площа дорівнює $\sqrt{3}.$

Розв'язання.

3. Нехай α – гострий кут ромба, тоді $S = \sqrt{3}, S = \left(\sqrt{2}\right)^2 \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ менша діагональ дорівнює $\sqrt{2},$ а більша дорівнює $\sqrt{6}.$

II рівень

4. У трикутнику $ABC\left(\angle B = 60^\circ\right)$ висота AH, бісектриса BK, медіана CM перетинаються в точці $O.$ Довести, що трикутник ABC – правильний.

Розв'язання.

4. $\angle BAH = 30^\circ, \angle ABK = \angle CBK = 30^\circ \Rightarrow OA = OB \Rightarrow$ OM – медіана, висота, бісектриса рівнобедреного $\Delta AOB \Rightarrow$ CM – медіана, висота $\Delta ABC \Rightarrow$ $AC = BC$. Точка O є точкою перетину висот $AH, CM \Rightarrow$ бісектриса BK є теж висотою, тому $AB = BC$. Остаточно $AB = BC = CA$.

5. Числа a, b, c утворюють зростаючу геометричну прогресію, а числа $a, b+2, c$ утворюють арифметичну прогресію. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо сума елементів геометричної прогресії дорівнює 13.

Розв'язання.

5. З умови одержимо систему рівнянь $a + aq^2 = 2(aq+2), a + aq + aq^2 = 13$. Звідси $q_1 = 3, a_1 = 1;$ $q_2 = \frac{1}{3}, a_2 = 3$. Умові задачі задовольняє лише перший набір. Відповідь: 4.

III рівень

6. Довести нерівність $\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(x+y)(y+z)} + \frac{z^2}{(y+z)(x+z)} \ge \frac{3}{4}$, де $x, y, z \ge 0$.

Розв'язання.

6.

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(x+y)(y+z)} + \frac{z^2}{(y+z)(x+z)} \ge \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\left(x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y)\right) \ge 3(x+y)(x+z)(y+z) \Leftrightarrow$$

$$4\left(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y\right) \ge 3\left(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 2xyz\right) \Leftrightarrow x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y \ge 6xyz.$$

Істинність останньої нерівності випливає з нерівності Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним.

7. Знайти всі прості числа p, q, для яких число $p^2 + q^2 - 2$ є простим.

Розв'язання.

7. Очевидно, що одне із заданих чиел парне, а отже дорівнює 2. Нехай для конкретності $q = 2$. Тоді $p^2 + 2$ – просте. Якщо $p = 3$, то одержимо $p^2 + 2 = 11$ – просте число. Нехай $p \ne 3$. Маємо $p = 3n \pm 1 \Rightarrow p^2 + 2 = 9n^2 \pm 6n + 3 = 3\left(3n^2 \pm 2n + 1\right)$ – складене число. Відповідь: 2 та 3.

<u>11 клас</u>

I рівень

1.Розв'язати рівняння $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2$.

Розв'язання.

1. ОДЗ: $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Нехай $t = \log_{\sin x} \cos x \Rightarrow \log_{\cos x} \sin x = \frac{1}{t}$. Знаходимо $t = 1$. Тоді $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. Залишається врахувати ОДЗ. Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

2. Знайти множину значень функції $y=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2018}$.

Розв'язання.

2. Зрозуміло, що $y\geq 0,$ до того ж $y(1)=0.$ Але $y=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2018}\leq 1=y(0).$ Внаслідок неперервності заданої функції множиною її значень є $[0;1].$

3. Дано дві сфери, радіуси яких дорівнюють 15 та 20, а відстань між центрами дорівнює 25. Знайти радіус кола, по якому перетинаються задані сфери.

Розв'язання.

3. Нехай O_1, O_2, S – центри сфер і кола відповідно, A – довільна точка кола. Тоді радіус AS є висотою трикутника AO_1O_2. Але $AO_1^{\,2}+AO_2^{\,2}=O_1O_2^{\,2}\Rightarrow \angle A=90^\circ.$ Маємо $AO_1\cdot AO_2=AS\cdot O_1O_2\Rightarrow AS=12.$ Відповідь: 12.

II рівень

4. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases}\sin x\cos y=a,\\ \sin y\cos x=0,5\end{cases}$ має розв'язки?

Розв'язання.

4. $\begin{cases}\sin x\cos y=a,\\ \sin y\cos x=0,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(x+y)=a+0,5,\\ \sin(x-y)=a-0,5.\end{cases}$ Звідси $\begin{cases}-1\leq a+0,5\leq 1,\\ -1\leq a-0,5\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow -0,5\leq a\leq 0,5.$ Відповідь: $a\in[-0,5;0,5].$

5. AA', BB', CC' – висоти гострокутного трикутника ABC. Довести, що кола, описані навколо трикутників $AB'C', BC'A', CA'B',$ мають спільну точку.

Розв'язання.

5. Нехай H – точка перетину висот трикутника ABC. Достатньо показати, що вказані кола проходять через точку H. Але ці кола є описаними навколо чотирикутників $AB'HC', BC'HA', CA'HB',$ у кожного з яких два протилежні кути є прямими. Отже, точка H належить кожному з цих кіл.

III рівень

6. Довести нерівність $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2},$ де $x,y,z>0;\quad xyz=1.$

Розв'язання.

6. За нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним маємо $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geq x, \frac{y^2}{x+z}+\frac{x+z}{4}\geq y, \frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq z.$ Залишається додати ці три нерівності і скористатися нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3.$

7. Знайти всі прості числа $p,q,$ для яких число p^q+q^p є простим.

Розв'язання.

7. Очевидно, що одне із заданих чиел непарне, друге – парне, а отже дорівнює 2. Нехай для конкретності $q=2$, $p=2n+1$ – непарне число. Тоді за умовою p^2+2^p – просте. Якщо $p=3$, то одержимо $p^q+q^p=17$ – просте число. Нехай $p\neq 3$. Маємо $p=2n+1, p=3m\pm 1 \Rightarrow p^2+2^p=\left(9m^2\pm 6n+1\right)+2\cdot 4^n$ ділиться на 3, тому не є простим числом. Відповідь: 2 та 3.